BACALAUREAT 2006
SESIUNEA SPECIALĂ

M1

Filiera teoretică, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profil Militar, specializarea matematică - informatică.

SUBIECTUL I

a) Să se determine a, $b \in \mathbb{R}$, astfel încât punctele $A(1,6)$ şi $C(6,1)$ să se afle pe dreapta de ecuaţie $x + ay + b = 0$.

b) Să se calculeze lungimea segmentului cu capetele în punctele $P(5,6,7)$ şi $Q(6,5,7)$.

c) Să se calculeze suma $\text{ctg}(-2) + \text{ctg}(-1) + \text{ctg}(1) + \text{ctg}(2)$.

d) Să se determine a, $b \in \mathbb{R}$, astfel încât să avem egalitatea de numere complexe $\dfrac{2-3i}{3-2i} = a + bi$.

e) Să se calculeze distanţa de la punctul $B(3,3)$ la dreapta de ecuaţie $x + y - 7 = 0$.

f) Să se calculeze aria triunghiului cu vârfurile în punctele $A(1,6)$, $B(3,3)$ şi $C(6,1)$.

SUBIECTUL II

1. **a)** Să se calculeze suma $\hat{3} + \hat{4} + \hat{5} + \hat{8} + \hat{7} + \hat{9}$ în grupul $(\mathbb{Z}_{12}, +)$.

b) Să se determine simetricul faţă de înmulţire al elementului $\hat{7} \in \mathbb{Z}_{12}$.

c) Să se determine inversa funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 3$.

d) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $25^x = 5$.

e) Să se calculeze probabilitatea ca un element $n \in \{1,2,3,4,5\}$ să verifice relaţia $n^3 < 2^n$.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-5x}$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$.

c) Să se calculeze $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.

d) Să se arate că funcţia f este convexă pe $\mathbb{R}$.

e) Să se calculeze $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \int_0^x f(t)\,dt$.

SUBIECTUL III

Se consideră mulţimea M formată din toate matricele cu 3 linii şi 3 coloane, fiecare matrice din M având numai elemente *distincte* din mulţimea $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

a) Să se verifice că $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \in M$ şi că $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \notin M$.

b) Să se calculeze determinantul matricei $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$.

c) Să se găsească o matrice $A \in M$, astfel încât $\det(A) \neq 0$.

d) Să se arate că, dacă $B \in M$ este o matrice inversabilă, atunci $B^{-1} \notin M$.

e) Să se arate că dacă $D \in M$, atunci $\text{rang}(D) \in \{2,3\}$.

f) Să se determine numărul elementelor mulţimii M.

g) Să se arate că mulţimea M conţine cel puţin 18 matrice cu determinantul egal cu 0.

SUBIECTUL IV

Se consideră şirurile $(a_n)_{n\geq 2}$ şi $(b_n)_{n\geq 2}$, definite prin

$a_n = \sqrt{2+\sqrt[3]{3+\ldots+\sqrt[n-1]{n-1+\sqrt[n]{n}}}}$, $b_n = \sqrt{2+\sqrt[3]{3+\ldots+\sqrt[n-1]{n-1+\sqrt[n]{n+2}}}}$, $(\forall)\ n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$.

a) Să se verifice că $a_n < b_n$, $(\forall)\ n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$.

b) Să se calculeze a_2 şi b_2.

c) Să se arate că $a_4 > 1,9$.

d) Utilizând metoda inducţiei matematice, să se arate că $2^{n+1} > n+3$, $(\forall)\ n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$.

e) Să se arate că şirul $(a_n)_{n\geq 2}$ este strict crescător şi şirul $(b_n)_{n\geq 2}$ este strict descrescător.

f) Să se arate că şirurile $(a_n)_{n\geq 2}$ şi $(b_n)_{n\geq 2}$ sunt convergente.

g) Să se arate că şirurile $(a_n)_{n\geq 2}$ şi $(b_n)_{n\geq 2}$ au aceeaşi limită şi limita lor este un număr din intervalul $(1,9;2)$.

SESIUNEA IUNIE-IULIE

M1

Filiera teoretică, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profil Militar, specializarea matematică - informatică.

SUBIECTUL I

a) Să se calculeze distanţa dintre punctele $A(2, 1, -2)$ şi $B(3, -3, 1)$.

b) Să se determine raza cercului $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 16$.

c) Să se determine ecuaţia tangentei la parabola $y^2 = 5x$ în punctul $P(5, 5)$.

d) Să se calculeze modulul numărului complex $\dfrac{5-2i}{2-5i}$.

e) Să se calculeze aria unui triunghi cu vârfurile în punctele $M(2, 3)$, $N(2, -2)$ şi $P(3, 2)$.

f) Să se afle $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât să se verifice egalitatea de numere complexe $\left(\cos\dfrac{3\pi}{10} + i\sin\dfrac{3\pi}{10}\right)^{10} = a + ib$.

SUBIECTUL II

1. **a)** Să se calculeze suma primilor 8 termeni dintr-o progresie aritmetică în care primul termen este 1 şi raţia este 3.

b) Să se calculeze probabilitatea ca un element $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ să verifice relaţia $2^n \le 3 + \log_2 n$.

c) Să se calculeze suma elementelor din grupul $(\mathbb{Z}_{11}, +)$.

d) Să se calculeze expresia $E = C_5^1 - C_5^2 + C_5^3 - C_5^4$.

e) Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x^3 - x^2 + x - 1 = 0$.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{2006} + 1$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx$.

c) Să se arate că funcţia f este convexă pe $\mathbb{R}$.

d) Să se calculeze $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$.

e) Să se calculeze $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\int_0^n \sin x\, dx$.

SUBIECTUL III

Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Convenim că $\operatorname{rang}(O_2) = 0$.

a) Să se calculeze determinanţii matricelor J şi I_2.

b) Să se calculeze matricea J^2.

c) Să se arate că, dacă $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, atunci $A^2 - (a+d)A + (ad - bc)I_2 = O_2$.

d) Să se găsească o matrice $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ pentru care $\operatorname{rang}(M) \neq \operatorname{rang}(M^2)$.

e) Să se arate că, dacă matricea $B \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ este inversabilă, atunci matricea B^n este inversabilă, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$.

f) Utilizând eventual metoda inducţiei matematice, să se arate că, dacă matricea $C = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ nu este inversabilă, atunci $C^n = (p+s)^{n-1}C$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$.

g) Să se arate că, dacă matricea $D \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ verifică $\text{rang}(D) = \text{rang}(D^2)$, atunci $\text{rang}(D) = \text{rang}(D^n)$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - \ln(e^x + 1)$ şi şirul $(a_n)_{n\geq 1}$, definit prin $a_n = \dfrac{1}{e+1} + \dfrac{1}{e^2+1} + \ldots + \dfrac{1}{e^n+1}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se verifice că $f'(x) = \dfrac{1}{e^x+1}$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se arate că funcţia f' este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$.

c) Utilizând teorema lui *Lagrange*, să se arate că $(\forall)\ k \in [0, \infty)$, există $c \in (k, k+1)$, astfel încât $f(k+1) - f(k) = \dfrac{1}{e^c+1}$.

d) Să se arate că $\dfrac{1}{e^{k+1}+1} < f(k+1) - f(k) < \dfrac{1}{e^k+1}$, $(\forall)\ k \in [0, \infty)$.

e) Să se arate că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător.

f) Să se arate că $f(n+1) - f(1) < a_n < f(n) - f(0)$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$.

g) Să se arate că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent şi are limita un număr real din intervalul $\left[\ln\left(1+\dfrac{1}{e}\right), \ln 2\right]$.

M1

Filiera teoretică, specializarea Ştiinţe ale naturii; Filiera tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

SUBIECTUL I

a) Să se calculeze modulul numărului complex $2 - i$.

b) Să se calculeze lungimea segmentului cu capetele în punctele $A(-1, 4)$ şi $C(4, -1)$.

c) Să se calculeze suma de numere complexe $S = i + i^4 + i^7 + i^{10}$.

d) Să se determine a, $b \in \mathbb{R}$, astfel încât punctele $A(-1, 4)$ şi $C(4, -1)$ să fie pe dreapta de ecuaţie $x + by + a = 0$.

e) Să se calculeze aria triunghiului cu vârfurile în punctele $A(-1, 4)$, $B(2, 2)$ şi $C(4, -1)$.

f) Să se determine a, $b \in \mathbb{R}$, astfel încât să avem egalitatea de numere complexe $\dfrac{5 + 6i}{6 - 5i} = a + bi$.

SUBIECTUL II

1. **a)** Să se calculeze determinantul $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$.

b) Să se calculeze rangul matricei $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

c) Să se rezolve în mulţimea numerelor reale strict pozitive ecuaţia $\log_3 x = -1$.

d) Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $9^x - 27 = 0$.

e) Să se calculeze probabilitatea ca un element $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ să verifice relaţia $n^3 < 2^n$.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 4x^3 + 2x - 2$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx$.

c) Să se calculeze $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$.

d) Să se arate că funcţia f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

e) Să se calculeze $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{7n^2 + 3}{3n^2 - 2}$.

SUBIECTUL III

Se consideră numărul real $\omega = 1 + \sqrt{2}$ şi mulţimea $H = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. Notăm $\overline{\omega} = 1 - \sqrt{2}$ şi cu $G = \{z \in H \mid (\exists) y \in H \text{ astfel încât } y \cdot z = 1\}$.

a) Să se verifice că $0 \in H$, $1 \in H$, $\omega \in H$ şi $\overline{\omega} \in H$.

b) Să se verifice că $\omega^2 = 2\omega + 1$.

c) Să se arate că, dacă z, $y \in H$, atunci $z + y \in H$ şi $z \cdot y \in H$.

d) Să se arate că $\omega \cdot (-\overline{\omega}) = 1$.

e) Să se arate că $\omega \in G$.

f) Să se arate că mulţimea G are cel puţin 2006 elemente.

g) Să se arate că $\omega^{2006} \notin \mathbb{Q}$.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcţiile $f, g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$ şi $g(x) = \dfrac{1}{x}$.

a) Să se calculeze $f'(x)$ şi $g'(x)$, $x \in (0, \infty)$.

b) Să se calculeze $\int_1^2 f^2(x)\, dx$.

c) Să se calculeze $\int_1^2 g^2(x)\, dx$.

d) Să se determine ecuaţia asimptotei verticale la graficul funcţiei g.

e) Să se arate că $t^2 e^{2x} - 2t\frac{e^x}{x} + \frac{1}{x^2}$, $(\forall)\ t \in \mathbb{R}$, $(\forall)\ x > 0$.

f) Integrând inegalitatea de la punctul **e)** , să se arate că $t^2 \int_1^2 e^{2x}\, dx - 2t \int_1^2 \frac{e^x}{x}\, dx + \int_1^2 \frac{1}{x^2}\, dx \geq 0$, $(\forall)\ t \in \mathbb{R}$.

g) Să se arate că $\left(\int_1^2 \frac{e^x}{x}\, dx\right)^2 \leq \int_1^2 e^{2x}\, dx \cdot \int_1^2 \frac{1}{x^2}\, dx$.

M2

Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale şi protecţia mediului, toate specializările

SUBIECTUL I

a) Să se calculeze distanţa de la punctul $A(0,2)$ la punctul $B(2,0)$.

b) Să se calculeze $\cos^2 101 + \sin^2 101$.

c) Să se calculeze aria unui triunghi echilateral cu latura de lungime 6.

d) Să se calculeze conjugatul numărului complex $2+5i$.

e) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât punctele $A(0,2)$ şi $B(2,0)$ să fie pe dreapta de ecuaţie $x+ay+b=0$.

f) Dacă în triunghiul ABC, $AB=8$, $AC=8$ şi $m(\sphericalangle BAC)=\dfrac{\pi}{2}$, să se calculeze BC.

SUBIECTUL II

1. **a)** Să se calculeze determinantul $\begin{vmatrix} 10 & 5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$.

b) Să se calculeze probabilitatea ca un element $n \in \{1,2,3,4,5\}$ să verifice relaţia $4^n < 20$.

c) Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $4^x - 4 = 0$.

d) Să se rezolve în mulţimea numerelor reale strict pozitive ecuaţia $\log_9 x = 1$.

e) Să se calculeze expresia $E = C_7^2 - C_7^2$.

2. Se consideră funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3}$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x\in(0,\infty)$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

c) Să se arate că funcţia f este strict descrescătoare pe intervalul $(0,\infty)$.

d) Să se calculeze $\displaystyle\int_1^2 f'(x)\,dx$.

e) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+3}{3n+2}$.

SUBIECTUL III

Se consideră polinoamele $f = X^2+5X+7$ şi $g = X^2+5X+6$.

a) Să se determine rădăcinile complexe ale polinomului f.

b) Să se rezolve în mulţimea numerelor reale inecuaţia $x^2+5x+6<0$.

c) Să se verifice identitatea $\dfrac{1}{g(n)} = \dfrac{1}{n+2} - \dfrac{1}{n+3}$, $(\forall)\ n\in\mathbb{N}^*$.

d) Să se calculeze suma $\dfrac{1}{g(1)} + \dfrac{1}{g(2)} + \ldots + \dfrac{1}{g(2006)}$.

e) Să se verifice că $f = \left(X+\dfrac{5}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$.

f) Să se arate că pentru orice două polinoame $s, t\in\mathbb{R}[X]$, avem relaţia $g \neq s^2+t^2$.

g) Să se găsească două polinoame $u, v\in\mathbb{C}[X]$, astfel încât să avem $g = u^2+v^2$.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se verifice că $f(x) > 0$, $(\forall)$ $x \in \mathbb{R}$ şi $f'(x) > 0$, $(\forall)$ $x \in \mathbb{R}$.

c) Să se determine ecuaţia asimptotei către $-\infty$ la graficul funcţiei f.

d) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)\, dx$.

e) Să se arate că funcţia f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

f) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $f(x) + f(x+1) = 1 + e$.

g) Să se arate că există două funcţii $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, strict crescătoare, astfel încât $f(x) = g(x) - h(x)$, $(\forall)$ $x \in \mathbb{R}$.

M3

Filiera vocaţională, profilul pedagogic, specializarea învăţător-educatoare.

SUBIECTUL I

a) Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x^2 + 7x - 8 = 0$.

b) Să se rezolve în mulţimea numerelor reale inecuaţia $x^2 + 7x - 8 < 0$.

c) Să se rezolve în mulţimea numerelor reale şi strict pozitive ecuaţia $\log_3 x = 3$.

d) Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $5^x = 125$.

e) Dacă $\frac{1}{11} = 0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$, să se calculeze a_{2006}.

f) Să se determine cel mai mare număr real a pentru care funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 6x + 1$ este strict descrescătoare pe intervalul $(-\infty, a]$.

SUBIECTUL II

1. **a)** Să se determine toate numerele $n \in \mathbb{N}^*$, care verifică relaţia $n! \leq 100$.

b) Să se scrie toate elementele din mulţimea $\{10, 11, 12, \dots, 35\}$ care se divid cu 5.

c) Dacă $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$, $C = \{6, 7, 8\}$, să se determine mulţimea $A \cup (B \cap C)$.

d) Să se calculeze produsul primelor 10 zecimale ale numărului $\sqrt{170}$.

e) Să se scrie toate elementele din şirul C_4^0, C_4^1, C_4^2, C_4^3, C_4^4 care se divid cu 3.

2. Se consideră triunghiurile asemenea ABC şi DEF astfel încât $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF} = \sqrt{3}$.

a) Să se calculeze raportul dintre perimetrul triunghiului ABC şi perimetrul triunghiului DEF.

b) Să se calculeze aria triunghiului DEF, ştiind că aria triunghiului ABC este egală cu 10.

c) Dacă înălţimea din A a triunghiului ABC are lungimea 7, să se calculeze lungimea înălţimii din D a triunghiului DEF.

d) Dacă măsura unghiului A al triunghiului ABC este $50°$, să se calculeze măsura unghiului D al triunghiului DEF.

e) Dacă lungimea laturii AC este 10, să se calculeze lungimea laturii DF.

SUBIECTUL III

Într-un plan se consideră un triunghi ABC şi L un punct pe segmentul (BC). Înălţimea din vârful A al triunghiului ABC cade în $K \in (BL)$. Se mai consideră patrulaterul convex $MNPQ$, iar R şi S sunt mijloacele diagonalelor MP şi NQ.

a) Să se arate că $AL^2 = AK^2 + KL^2$.

b) Să se arate că $AL^2 = AB^2 + BL^2 - 2BK \cdot BL$.

c) Să se arate că $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2BK \cdot BC$.

d) Utilizând relaţiile de la punctele **b)** şi **c)** , să se arate că $AL^2 \cdot BC = AB^2 \cdot LC + AC^2 \cdot LB - BL \cdot CL \cdot BC$.

e) Să se arate că, dacă D este mijlocul laturii BC, atunci $4AD^2 = 2(AB^2 + AC^2) - BC^2$.

f) Să se arate că $4SR^2 = 2MS^2 + 2SP^2 - MP^2$.

g) Utilizând relaţia de la punctul **e)** în triunghiurile MNQ şi PNQ şi relaţia de la punctul **f)** , să se arate că: $4SR^2 = MN^2 + NP^2 + PQ^2 + QM^2 - (MP^2 + QN^2)$.

SUBIECTUL IV

Se consideră mulţimea $A = \{3^i, 2 \cdot 3^i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Pentru fiecare submulţime finită şi nevidă a mulţimii A, considerăm suma tuturor elementelor sale, iar rezultatele acestor sume vor forma o mulţime pe care o notăm cu B. (De exemplu $1 \in B$, deoarece $\{1\} \subset A$, iar $7 \in B$, deoarece $\{1, 6\} \subset A$).

a) Să se verifice că $1 \in A$, $2 \in A$, $3 \in A$ şi $6 \in A$.

b) Să se verifice că $4 \notin A$ şi $7 \notin A$.

c) Să se arate că $4 \in B$ şi $5 \in B$.

d) Să se arate că, dacă $n \in B$, atunci $3n \in B$.

e) Să se calculeze numărul de elemente din mulţimea $A \cap \{1, 2, 3, \ldots, 20\}$.

f) Să se arate că, dacă $n \in \mathbb{N}^*$, atunci există $p \in \mathbb{N}$, astfel încât $3^p \leq n < 3^{p+1}$.

g) Să se arate că $n \in B$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$.

SESIUNEA AUGUST

M1

Filiera teoretică, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profil Militar, specializarea matematică - informatică.

SUBIECTUL I

a) Să se calculeze modulul numărului complex $(2+3i)^2$.

b) Să se calculeze distanţa de la punctul $C(-1,-1)$ la dreapta $x+y=0$.

c) Să se determine ecuaţia tangentei la hiperbola $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$, dusă prin punctul $P(-5,4)$.

d) Să se determine $a>0$, astfel încât punctul $P(-4,-3)$ să se afle pe cercul $x^2+y^2=a$.

e) Să se calculeze aria triunghiului cu vârfurile în punctele $A(-3,3)$, $B(-5,5)$ şi $C(-1,-1)$.

f) Să se calculeze produsul $(\text{tg } 1^\circ - \text{tg } 7^\circ)\cdot(\text{tg } 2^\circ - \text{tg } 6^\circ)\cdot\ldots\cdot(\text{tg } 7^\circ - \text{tg } 1^\circ)$.

SUBIECTUL II

1. **a)** Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $25^x+4\cdot 5^x-5=0$.

b) Să se calculeze expresia $C_6^1-C_6^2+C_6^4$.

c) Dacă funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este $f(x)=x^4-x$, să se calculeze $(f\circ f)(0)$.

d) Să se calculeze probabilitatea ca un element $n\in\{1,2,\ldots,5\}$, să se verifice relaţia $3^n\geq 8n$.

e) Să se calculeze suma elementelor din grupul $(\mathbb{Z}_{18},+)$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=1+\ln(x^2+1)$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1 f'(x)\,dx$.

c) Să se determine intervalele de monotonie ale funcţiei f.

d) Să se calculeze $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

e) Să se calculeze $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n-\cos n}{n}$.

SUBIECTUL III

Se consideră matricele $E=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $F=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{4}&\frac{1}{5}\end{pmatrix}$ şi $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ şi mulţimile $H=\{X\in\mathscr{M}_2(\mathbb{R})\,|\,X^2=X\}$ şi $M=\{aA+bB+cC+dD\,|\,(\forall)\,a,b,c,d\in\mathbb{R};(\forall)\,A,B,C,D\in H\}$.

a) Să se verifice că $E\in H$ şi $I_2\in H$.

b) Să se găsească o matrice $P\in H$, astfel încât $\text{rang}(P)=1$ şi o matrice $Q\in H$, astfel încât $\text{rang}(Q)=2$.

c) Să se verifice că, $(\forall)$ a, $b\in\mathbb{R}$ matricele $\begin{pmatrix}1&a\\0&0\end{pmatrix}$ şi $\begin{pmatrix}1&0\\b&0\end{pmatrix}$ sunt din mulţimea H.

d) Să se arate că, dacă $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in H$, atunci $a+d\in\{0,1,2\}$.

e) Să se arate că, dacă $B\in H$ este o matrice inversabilă, atunci $B=I_2$.

f) Să se arate că $M=\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

g) Să se arate că matricea F nu se poate scrie ca o sumă finită de matrice din mulţimea H.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcţiile continue $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ şi $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ şi funcţia $h : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $h(x) = \sqrt{1 - x^9}$, unde a, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

a) Să se arate că $h(x) \geq 1 - x^9$, $(\forall)\ x \in [0, 1]$.

b) Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1 h^2(x)\ dx$.

c) Să se verifice că $t^2 f^2(x) - 2tf(x)g(x) + g^2(x) \geq 0$, $(\forall)\ t \in \mathbb{R}$ şi $(\forall)\ x \in [a, b]$.

d) Integrând inegalitatea de la punctul **c)** , să se arate că $\displaystyle t^2 \int_a^b f^2(x)\ dx - 2t \int_a^b f(x)g(x)\ dx + \int_a^b g^2(x)\ dx \geq 0$, $(\forall)\ t \in \mathbb{R}$.

e) Să se deducă inegalitatea $\displaystyle\left(\int_a^b f(x)g(x)\ dx\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(x)\ dx\right) \cdot \left(\int_a^b g^2(x)\ dx\right)$.

f) Utilizând inegalitatea de la punctul **e)** să se arate că, dacă $u : [0, 1] \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă, atunci $\displaystyle\left(\int_0^1 u(x)\ dx\right)^2 \leq \int_0^1 u^2(x)\ dx$.

g) Să se arate că aria suprafeţei plane cuprinsă între graficul funcţiei h, axa Ox şi dreptele $x = 0$ şi $x = 1$, este un număr real din intervalul $(0,90; 0,95)$.

M1

Filiera teoretică, specializarea Ştiinţe ale naturii; Filiera tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

SUBIECTUL I

a) Să se calculeze modulul numărului complex $-7+3i$.

b) Să se calculeze lungimea segmentului cu capetele în punctele $A(2,1)$ şi $C(1,2)$.

c) Să se calculeze suma $S = 1 + z^3 + z^6 + z^9$, unde $z = -i \in \mathbb{C}$.

d) Să se determine $a,\ b \in \mathbb{R}$, astfel încât punctele $A(2,1)$ şi $C(1,2)$ să fie pe dreapta de ecuaţie $x + ay + b = 0$.

e) Să se calculeze aria triunghiului cu vârfurile în punctele $A(2,1)$, $B(1,1)$ şi $C(1,2)$.

f) Să se determine $a,\ b \in \mathbb{R}$, astfel încât să avem egalitatea de numere complexe $\dfrac{2+5i}{5-2i} = a + bi$.

SUBIECTUL II

1. **a)** Să se calculeze elementul $\hat{3}^{2006}$ în $(\mathbb{Z}_6, \cdot)$.

b) Să se calculeze expresia $E = C_9^3 - C_9^6 + C_9^9$.

c) Să se rezolve în mulţimea numerelor reale strict pozitive ecuaţia $\log_4 x = -1$.

d) Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $8^x - 2 = 0$.

e) Să se calculeze probabilitatea ca un element $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ să verifice relaţia $2^n \leq 22$.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 4x^3 + 2x + 1$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1 f(x)\ dx$.

c) Să se calculeze $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$.

d) Să se arate că funcţia f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

e) Să se calculeze $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{3n+3}{2n-3}$.

SUBIECTUL III

Se consideră M mulţimea matricelor cu două linii şi două coloane şi toate elementele numere naturale şi matricele $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ şi $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Să se verifice că $E \in M$ şi că $I_2 \in M$.

b) Să se arate că, dacă $A,\ B \in M$, atunci $A + B \in M$.

c) Să se arate că, dacă $A,\ B \in M$, atunci $A \cdot B \in M$.

d) Să se găsească o matrice $C \in M$, astfel încât $\text{rang}(C) = 1$.

e) Să se găsească o matrice $D \in M$, astfel încât $\det(D) = 2006$.

f) Să se arate că matricea E este inversabilă şi $E^{-1} \notin M$.

g) Să se determine toate matricele $X \in M$, inversabile, cu proprietatea că $X^{-1} \in M$.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{x^2}$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se arate că, dacă $x \in [1, e]$, atunci $(x-1)\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e}\right) \geq 0.$

c) Utilizând inegalitatea de la punctul **b)** , să se arate că, dacă $x \in [1, e]$, atunci $\frac{1}{x} + \frac{x}{e} \leq \frac{1+e}{e} \cdot$

d) Să se verifice că $\frac{1}{f(x)} + \frac{f(x)}{e} \leq \frac{1+e}{e}$, $(\forall)\ x \in [0, 1]$.

e) Să se arate că, dacă $u,\ v \in \mathbb{R}$, atunci $(u+v)^2 \geq 4uv$.

f) Integrând inegalitatea de la punctul **d)** , să se arate că $\int_0^1 \frac{1}{f(x)}\ dx + \frac{1}{e}\int_0^1 f(x)\ dx \leq \frac{1+e}{e} \cdot$

g) Utilizând inegalitatea de la punctul **e)** , să se arate că $\left(\int_0^1 e^{x^2}\ dx\right) \cdot \left(\int_0^1 e^{-x^2}\ dx\right) \leq \frac{(e+1)^2}{4e} \cdot$

M2

Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale şi protecţia mediului, toate specializările

SUBIECTUL I

a) Să se calculeze distanţa de la punctul $A(5,-2)$ la punctul $B(-2,5)$.

b) Să se calculeze $\cos^2 211 + \sin^2 211$.

c) Să se calculeze aria unui triunghi echilateral cu latura de lungime $\sqrt{6}$.

d) Să se calculeze conjugatul numărului complex $-4+3i$.

e) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât punctele $A(5,-2)$ şi $B(-2,5)$ să fie pe dreapta de ecuaţie $x + ay + b = 0$.

f) Dacă în triunghiul ABC, $AB = 4$, $AC = 6$ şi $m(\sphericalangle BAC) = \dfrac{\pi}{2}$, să se calculeze BC.

SUBIECTUL II

1. **a)** Să se calculeze determinantul $\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 6 & 0 \end{vmatrix}$.

b) Să se calculeze probabilitatea ca un element $n \in \{1,2,3,4,5\}$ să verifice relaţia $3^n < 32$.

c) Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $4^x + 1 = 0$.

d) Să se rezolve în mulţimea numerelor reale strict pozitive ecuaţia $\log_8 x = -2$.

e) Să se calculeze expresia $E = C_5^1 - C_5^4 + C_5^5$.

2. Se consideră funcţia $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 4 + \dfrac{1}{x^3}$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (0,\infty)$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x-1}$.

c) Să se arate că funcţia f este strict descrescătoare pe intervalul $(0,\infty)$.

d) Să se calculeze $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx$.

e) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+3}{3n+2}$.

SUBIECTUL III

Se consideră numărul real $\omega = 2 - \sqrt{5}$ şi mulţimea $M = \{a + b\omega \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. Notăm $\overline{\omega} = 2 + \sqrt{5}$ şi cu $G = \{z \in M \mid (\exists) y \in M \text{ astfel încât } y \cdot z = 1\}$.

a) Să se verifice că $0 \in M$ şi $1 \in M$.

b) Să se verifice că $\omega^2 = 4\omega + 1$.

c) Să se arate că, dacă $z, y \in M$, atunci $z + y \in M$ şi $z \cdot y \in M$.

d) Să se arate că $(a + b\omega)(a + b\overline{\omega}) \in \mathbb{Z}$.

e) Să se arate că $\omega \in G$.

f) Să se arate că mulţimea G are cel puţin 2006 elemente.

g) Să se arate că $\omega^{2006} \notin \mathbb{Q}$.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 5 + 4^x$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se verifice că $f(x) > 0$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$ şi $f'(x) > 0$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

c) Să se determine ecuaţia asimptotei către $-\infty$ la graficul funcţiei f.

d) Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx$.

e) Să se arate că $t^2 + t + 1 > 0$, $(\forall)\ t \in \mathbb{R}$ şi $t^2 - t + 1 > 0$, $(\forall)\ t \in \mathbb{R}$.

f) Să se verifice identitatea $f'(x) = \dfrac{1}{2}\big((f'(x))^2 + f'(x) + 1\big) - \dfrac{1}{2}\big((f'(x))^2 - f'(x) + 1\big)$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

g) Să se arate că există două funcţii $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strict crescătoare, astfel încât $f(x) = g(x) - h(x)$, $(\forall)$ $x \in \mathbb{R}$.

M3

Filiera vocaţională, profilul pedagogic, specializarea învăţător-educatoare.

SUBIECTUL I

a) Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x^2 + 16x - 17 = 0$.

b) Să se rezolve în mulţimea numerelor reale inecuaţia $x^2 + 16x - 17 < 0$.

c) Să se rezolve în mulţimea numerelor reale şi strict pozitive ecuaţia $\log_7 x = 2$.

d) Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $32^x = 16$.

e) Dacă $\frac{1}{37} = 0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$, să se calculeze a_{2006}.

f) Să se determine cel mai mare număr real a pentru care funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 - 4x + 1$ este strict crescătoare pe intervalul $(-\infty, a]$.

SUBIECTUL II

1. **a)** Să se determine toate numerele $n \in \mathbb{N}^*$, care verifică relaţia $n^3 \leq 1000$.

b) Să se scrie toate elementele din mulţimea $\{10, 11, 12, \ldots, 95\}$ care se divid cu 13.

c) Dacă $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{c, d, e, f\}$. Să se determine mulţimea $A \cup B$.

d) Să se calculeze produsul primelor 4 zecimale ale numărului $\sqrt{290}$.

e) Să se scrie toate elementele din şirul C_4^0, C_4^1, C_4^2, C_4^3, C_4^4 care sunt numere impare.

2. **a)** Să se calculeze perimetrul unui triunghi echilateral cu aria de $2\sqrt{3}$.

b) Să se calculeze aria unui triunghi echilateral cu latura de $\sqrt{10}$.

c) Să se calculeze înălţimea unui triunghi echilateral cu latura de 7.

d) Să se calculeze perimetrul unui triunghi dreptunghic isoscel cu aria de 1.

e) Să se calculeze aria unui pătrat cu perimetrul de 16.

SUBIECTUL III

Se consideră triunghiul ABC şi punctele $D \in (BC)$, $E \in (AC)$ şi $F \in (AB)$. Notăm $\{M\} = BE \cap AD$, $\{N\} = BE \cap CF$ şi $\{P\} = CF \cap AD$. Punctul P este pe segmentul (AM), iar punctul M este pe segmentul (BN). Dacă XYZ este un triunghi, notăm cu S_{XYZ} aria sa. Să se arate că:

a) $S_{ABC} = S_{ABM} + S_{BCN} + S_{CAP} + S_{MNP}$.

b) dacă $S_{ABC} = S_{ABD} + S_{BCE} + S_{CAF}$, atunci $S_{MNP} = S_{FAP} + S_{BDM} + S_{CEN}$.

c) dacă $S_{MNP} = S_{FAP} + S_{BDM} + S_{CEN}$, atunci $S_{ABC} = S_{ABD} + S_{BCE} + S_{CAF}$.

d) $\frac{S_{BAD}}{S_{ABC}} = \frac{BD}{BC}$.

e) dacă $S_{MNP} = S_{FAP} + S_{BDM} + S_{CEN}$, atunci $\frac{BD}{BC} + \frac{CE}{AC} + \frac{AF}{AB} = 1$.

f) dacă $\frac{BD}{BC} + \frac{CE}{AC} + \frac{AF}{AB} = 1$, atunci $S_{MNP} = S_{FAP} + S_{BDM} + S_{CEN}$.

g) dacă triunghiul ABC este echilateral şi $S_{MNP} = S_{FAP} + S_{BDM} + S_{CEN}$, atunci $BD + CE = BF$.

SUBIECTUL IV

Se consideră mulţimea $A = \{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots, \sqrt{10}\}$.

a) Să se calculeze numărul de elemente din mulţimea $A \cap \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$.

b) Să se calculeze numărul de elemente din mulţimea $\{(a, b) \mid a \in A,\ b \in A\}$.

c) Să se determine cea mai mare valoare a raportului $\frac{a}{b}$, unde $a,\ b \in A$.

d) Să se determine cea mai mare valoare a produsului $a \cdot b$, unde $a,\ b \in A$.

e) Să se determine câte elemente de forma $\frac{a}{b}$, unde $a,\ b \in A$ sunt numere raţionale.

f) Să se arate că produsul tuturor elementelor mulţimii A este un număr iraţional.

g) Să se determine numărul de submulţimi ale mulţimii A care au numai elemente naturale.